

FONDAMENTI DI GEOMETRIA DEL COMPASSO

F. FABRIZI¹ P. PENNESTRÌ¹

INDICE

1	Introduzione	2
2	Contributi alla geometria del compasso	4
3	Conoscenze propedeutiche	4
3.1	Inversione	4
3.1.1	Inversione di un punto P esterno alla circonferenza \mathcal{C}	5
3.1.2	Inversione di un punto P interno alla circonferenza \mathcal{C}	6
3.1.3	Curva Inversa	7
3.1.4	Intersezione tra retta e circonferenza	8
3.2	Determinazione piede della perpendicolare	8
4	Il teorema di Mohr-Mascheroni	9
5	Conclusioni	11

SOMMARIO

In questo articolo, dopo alcuni cenni storici, viene esposta una dimostrazione del teorema di Mohr-Mascheroni. Secondo il teorema menzionato, tutte le costruzioni geometriche eseguibili con riga e compasso sono realizzabili con l'ausilio del solo compasso. Tale dimostrazione, proposta nel 1890 dal matematico Adler, utilizza il concetto di inversione.

¹ Liceo Scientifico Statale Isacco Newton, Roma

1 INTRODUZIONE

Il tema degli strumenti con i quali affrontare e risolvere problemi di geometria ha radici remote nella storia della matematica. I Greci, ad esempio, distinguevano le seguenti categorie di:

- curve geometriche;
- curve meccaniche.

Le prime erano quelle che potevano essere tracciate con riga (righello non graduato) e compasso, strumenti tipici delle costruzioni descritte negli *Elementi* di Euclide. Le seconde, invece, erano quelle descritte mediante appositi meccanismi articolati. Ad esempio, Plutarco¹ riferisce il rimprovero di Platone a Eutocius, Archytas e Menaechmus (380–320 a.C.) i quali utilizzarono strumenti meccanici per risolvere il celebre problema della *Duplicazione del cubo*.

Lo strumento utilizzato da Eutocius è schematizzato in Figura² 1

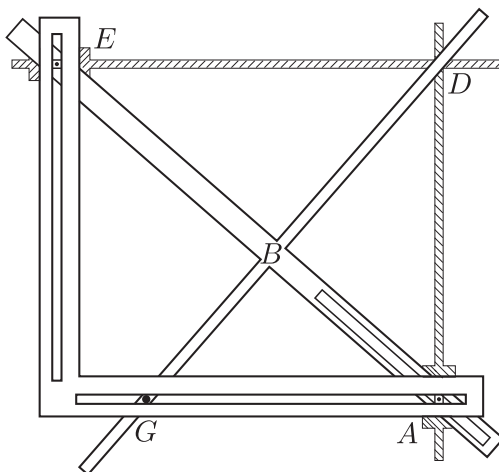


Figura 1: Strumento concepito da Eutocius per risolvere il problema della duplicazione del cubo.

La questione fu ripresa da Cartesio [1] il quale rifiuta la precedente distinzione con il seguente ragionamento:

... dobbiamo essere congruenti, rifiutare circonferenze e linee rette, poiché richiedono, per essere tracciate sul foglio, strumenti quali compasso e riga. Gli altri strumenti per tracciare curve, anche se più complicati, non per questo sono meno accurati.

A tale riguardo appare opportuno citare l'impiego di un *iperbolografo* (v. Figura² 2) realizzato da Cartesio per la soluzione del *Problema di Pappo*. È proprio nell'illustrare il funzionamento di tale meccanismo che Cartesio per la prima volta introduce le celeberrime coordinate che da lui prendono il nome.

¹ Quaestiones convivales VIII.ii, 718ef

²La figura è tratta dalla presentazione di F. Fabrizi, P. Pennestrì, *Simulation of Curve Tracing Linkages by means of GeoGebra*, International GeoGebra Conference, Budapest 23 - 25 Gennaio 2014

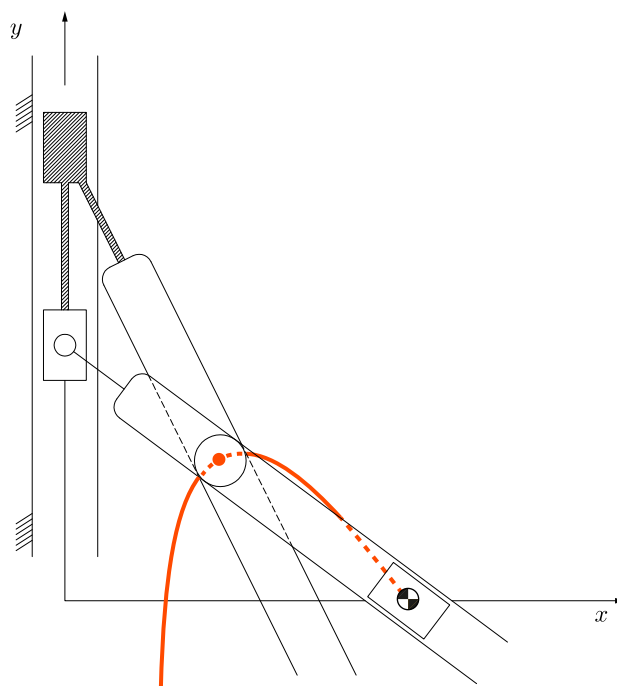


Figura 2: Schema dell'iperbolografo di Cartesio

La questione fu ripresa dal matematico *Lorenzo Mascheroni* (1750-1800) il quale si domandò se fosse possibile, tornando indietro nel progresso matematico, sviluppare qualche campo ancora inesplorato. Si accorse che, negli *Elementi*, Euclide per dimostrare le sue tesi, si avvaleva sempre di due strumenti fondamentali: il compasso e la riga. Egli si propose di servirsi del solo compasso per ottenere i punti necessari alla costruzione geometrica; la scelta non fu casuale, il compasso infatti era uno degli strumenti più precisi dell'epoca e meno soggetto ad errori rispetto alla riga. In un primo tempo decise di accantonare l'idea di una geometria del compasso perché temeva di complicare ulteriormente le dimostrazioni ed inoltre non ne vedeva alcuna utilità. Tuttavia Mascheroni si rendeva conto che l'impostazione delle costruzioni geometriche con il solo uso del compasso costituiva:

...Un ramo finora inesplorato dai matematici, che soluzioni di simili genere sarebbero state per la loro costruzione più elementare di ogni altra...

Il progetto fu ripreso quando, leggendo alla voce *Quart de Cercle mural* sulla *Encyclopédie Méthodique*, apprese degli sforzi compiuti dai celebri astronomi inglesi Graham e Bird per dividere esattamente il quarto di cerchio dei propri grandi strumenti astronomici e in particolare del frequente uso da essi fatto del compasso in tutte le principali operazioni geometriche. Riportiamo ora la frase, tratta dal libro *la Geometria del Compasso*, in cui Mascheroni dichiara le ragioni che lo hanno spinto alla stesura dell'opera:

Le costruzioni col solo compasso per trovare i punti della geometria elementare sarebbero state complicate a più doppi sopra le già conosciute nelle quali interviene la riga. Avrebbe dunque la teoria mancato di eleganza e la pratica di precisione. Sicché io era al procinto di abbandonare l'impresa. Mentre io era così irresoluto, m'accadde di rileggere la ma-

niera colla quale Graham, e Bird dividevano in Inghilterra i loro grandi quadranti astronomici.

Le perplessità di Mascheroni sull'utilità pratica della sua opera rivelano l'impostazione illuministica dei suoi studi, volti a ricerche per la soluzione di problemi pratici. L'opera di Mascheroni fu tradotta in francese ed in tedesco. Una nuova edizione in lingua italiana compare nel 1901.

2 CONTRIBUTI ALLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

Il primato sull'uso del solo compasso per la realizzazione delle costruzioni della Geometria Euclidea, è conteso dal matematico Danese Georg Mohr che, nel 1672, scrisse la monografia (scoperta nel 1925 dal Prof. Hjemslev di Copenhagen [2]) *Euclides Danicus*. Mohr nella prefazione a tale opera annuncia di voler svolgere gli elementi della geometria secondo Euclide ed altri autori

... in una maniera totalmente differente come si può supporre non sia stato fatto mai finora ed in nessuna lingua.

Egli si propose inoltre di indagare sulla natura della circonferenza e di rispondere alla domanda se sia possibile risolvere tutte le costruzioni planimetriche eseguibili con riga e compasso, con l'ausilio solo di quest'ultimo. Tuttavia, tutti gli storici della matematica sono concordi nell'affermare che Mascheroni non abbiano avuto conoscenza del lavoro di Mohr e che le sue deduzioni siano da ritenere del tutto originali.

La dimostrazione teorica che è possibile avvalersi del solo compasso nella realizzazione delle costruzioni Euclidee, dovuta al matematico Tedesco August Adler (1863-1923) [3], è resa possibile dall'uso del concetto di inversione introdotto da Jakob Steiner (1796-1863). Monografie interessanti sulla *Geometria del Compasso* sono dovute a Oliver Byrne [4], A. Quemper de Lanascot [5], D. Pedoe [6], A. Kostovskii [7]. Più recentemente gli autori di questo breve opuscolo hanno riproposto le costruzioni di Mascheroni utilizzando il software GeoGebra [8].

3 CONOSCENZE PROPEDEUTICHE

3.1 Inversione

Definizione 1 (Inversione). Sia \mathcal{C} una circonferenza di raggio r e centro O (polo dell'inversione) e P un generico punto del piano. Si definisce inversione quella particolare trasformazione che assegni a P un punto P_1 tale che:

$$OP \cdot OP_1 = r^2 \quad (1)$$

Forniamo ora una costruzione, che con l'ausilio del **solo compasso**, ci permetta di trovare P_1 punto inverso a P rispetto alla circonferenza \mathcal{C} di centro O e raggio r . Possiamo distinguere due casi di seguito graficamente illustrati:

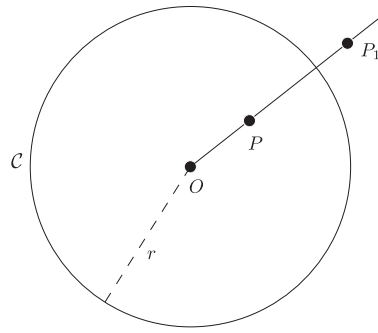
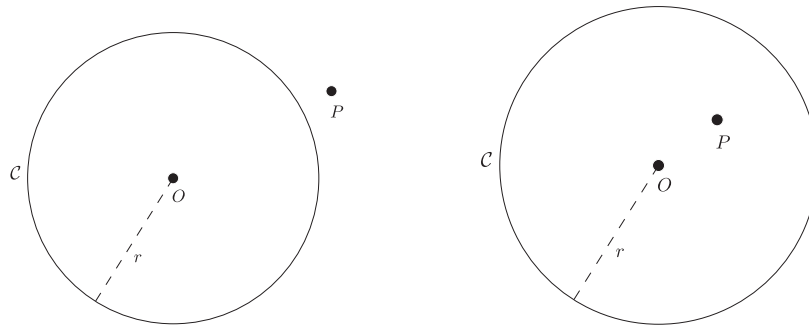


Figura 3: Inversione di un punto P rispetto ad una circonferenza C di raggio r e centro O (polo dell'inversione)



Caso 1 P esterno alla circonferenza C **Caso 2** P interno alla circonferenza C

3.1.1 *Inversione di un punto P esterno alla circonferenza C*

PROTOCOLLO DI COSTRUZIONE Con riferimento alla Figura 4:

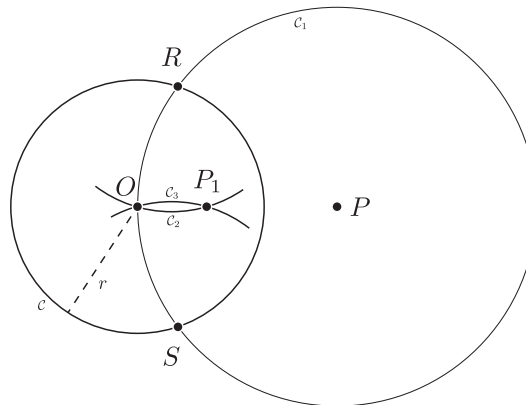


Figura 4: Inversione di un punto P rispetto ad una circonferenza di raggio r e centro O

- sia C_1 , la circonferenza di centro P e raggio PO ;
- siano R e S le intersezioni tra C e C_1 ;
- sia C_2 , la circonferenza di centro R e raggio RO ;
- sia C_3 , la circonferenza di centro S e raggio SO ;
- sia P_1 la restante intersezione tra C_2 e C_3 .

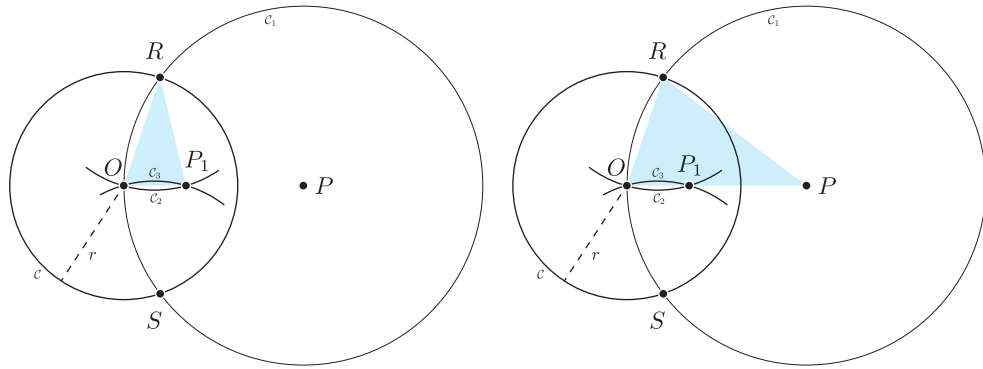


Figura 5: Inversione di un punto P rispetto ad una circonferenza di raggio r e centro O

DIMOSTRAZIONE Punti O , P e P_1 sono allineati per costruzione, di conseguenza i triangoli ORP_1 e ORP sono simili. Risulterà quindi:

$$OP_1 : OR = OR : OP \tag{2}$$

ovvero,

$$OP_1 \cdot OP = OR^2 = r^2 \tag{3}$$

3.1.2 Inversione di un punto P interno alla circonferenza C

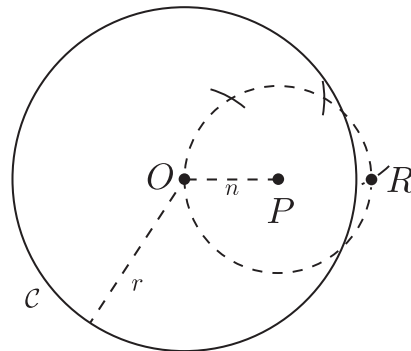


Figura 6: Inversione di un punto interno ad una circonferenza

PROTOCOLLO DI COSTRUZIONE Con riferimento alla Figura 6:

- si individui un punto R allineato con O e P esterno alla circonferenza C tale che:

$$OR = n \cdot OP \tag{4}$$

con $n \in \mathbb{N}$, arbitrario;

- si applichi ad R la costruzione proposta per il Caso I, per trovare il suo inverso R_1 .

DIMOSTRAZIONE Per le proprietà dell'inversione risulterà:

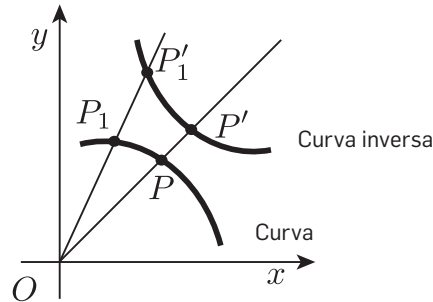
$$OR \cdot OR_1 = r^2 . \tag{5}$$

Sostituendo l'equazione (4) nella (5) otteniamo:

$$OP \cdot n \cdot OR_1 = r^2 \quad (6)$$

per cui $OP_1 = n \cdot OR_1$.

3.1.3 Curva Inversa



Definizione 2 (Curva inversa). Assegnata una curva p , diremo che la curva q è la sua inversa se risulta per r costante la seguente relazione:

$$OP \cdot OP' = r^2 \quad (7)$$

dove P e P' sono punti allineati con O (polo dell'inversione) appartenenti rispettivamente alle curve p e q .

Verifichiamo che la curva inversa ad una circonferenza \mathcal{C} è una retta r .

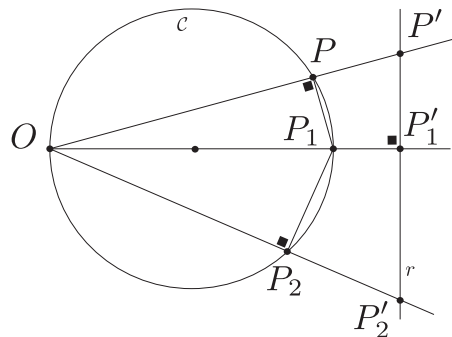


Figura 7: Circonferenza \mathcal{C} inversa alla retta r

Con riferimento alla figura 7 osserviamo la similitudine tra i triangoli:

- $OPP_1 \sim OP'P'_1$;
- $OP_1P_2 \sim OP'_1P'_2$

da cui possiamo ricavare le seguenti proporzioni:

$$\frac{OP_1}{OP} = \frac{OP'}{OP'_1} \quad (8a)$$

$$\frac{OP_1}{OP_2} = \frac{OP'_1}{OP'_2} \quad (8b)$$

Ovvero:

$$OP \cdot OP' = OP_1 \cdot OP'_1 = OP_2 \cdot OP'_2 \quad (9)$$

In definitiva, si è stabilito che se il punto P si muove su una circonferenza p passante per O (polo dell'inversione), il punto P' si muove su una retta q (curva inversa) ortogonale al diametro della circonferenza per O .

3.1.4 Intersezione tra retta e circonferenza

Data una retta a individuare i punti X e X_1 d'intersezione con la circonferenza C di centro O e raggio r .

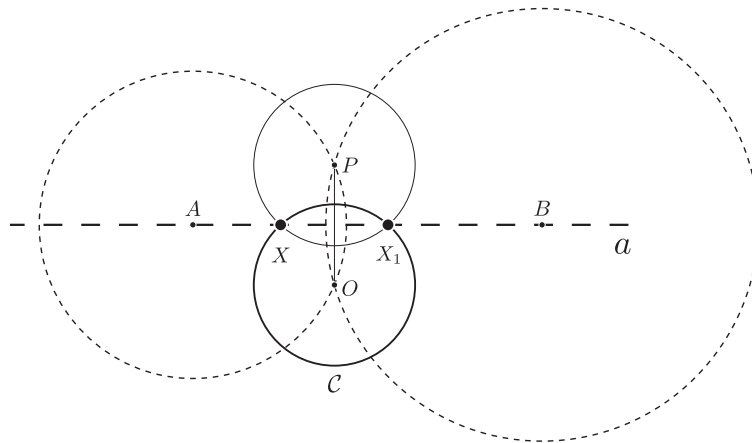


Figura 8: Intersezione retta circonferenza

PROTOCOLLO DI COSTRUZIONE Con riferimento alla Figura 8:

- scegliere su a due punti distinti A e B ;
- le circonferenze di centri A e B , passanti per O presenteranno in P il secondo punto d'intersezione;
- i punti X e X_1 si trovano nell'intersezione tra la circonferenza C e quella di centro P e raggio r .

La costruzione resta dimostrata che il poligono XPX_1O è un rombo.

3.2 Determinazione piede della perpendicolare

Data un retta r e un punto A esterno alla retta determinare, con l'ausilio del solo compasso il piede della perpendicolare. ³

³ La presente costruzione sembra non sia stata riportata altrove ed è dovuta a Pietro Pennestri.

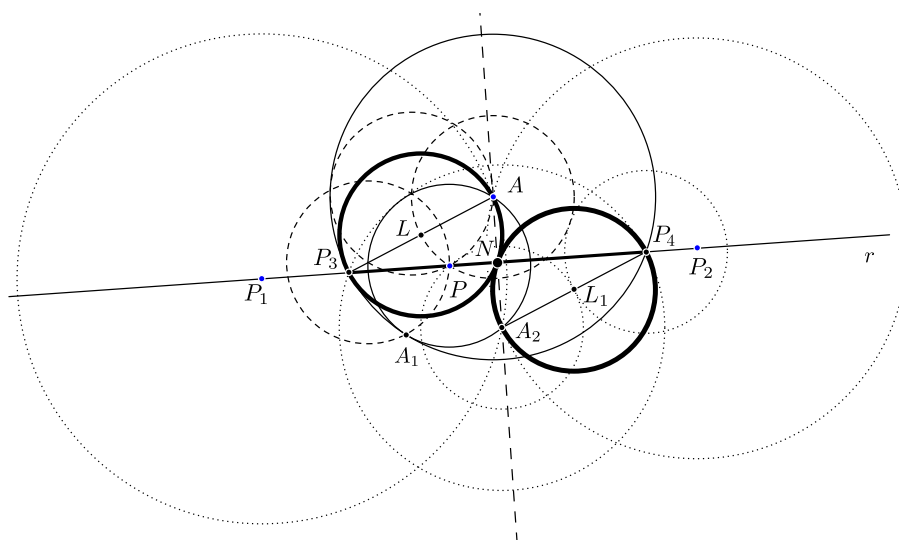


Figura 9: Determinazione piede della perpendicolare

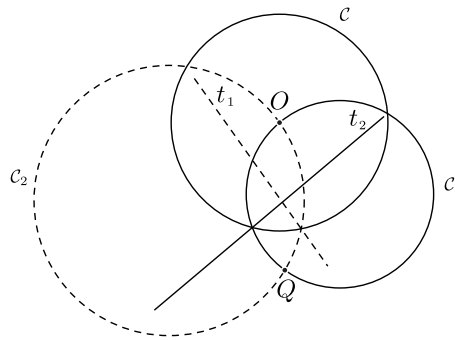
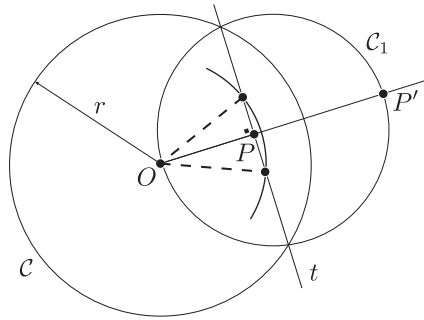
PROTOCOLLO DI COSTRUZIONE Con riferimento alla Figura 9:

- si individui sulla C il punto A_1 diametralmente opposto ad A ;
- tracciare una circonferenza di centro A e raggio AA_1 ;
- si scelgano arbitrariamente sulla retta r i punti P_1 e P_2 ;
- tracciare le circonferenze C_1 e C_2 di centri P_1 e P_2 , rispettivamente e raggi P_1A e P_2A ;
- indicare con A_2 il secondo punto d'intersezione tra C_1 e C_2 ;
- tracciare la circonferenza C_3 di centro A_2 e raggio AA_1 , che andrà ad intersecare la C in P_3 e P_4 ;
- individuare il punto L , medio del segmento AP_3 , sapendo che per costruzione $2 \cdot AP = AP_3$ (impiegare il procedimento, illustrato in precedenza, che porta a definire l'intersezione tra retta e circonferenza);
- similmente ripetere la costruzione individuando il punto L_1 , medio del segmento A_2P_4 ;
- tracciare le circonferenze C_4 e C_5 , rispettivamente di centri L ed L_1 e raggio LA ;
- Individuare il punto N di tangenza tra le circonferenze C_4 e C_5 .

Il punto N costituirà il piede della perpendicolare condotta da A ad r , come si dimostra osservando che il poligono $AP_3A_2P_4$ è un rombo.

4 IL TEOREMA DI MOHR-MASCHERONI

Teorema 1 (Mohr-Mascheroni). *Qualsiasi costruzione geometrica eseguibile con riga e compasso, può essere eseguita con l'ausilio del solo compasso.*



Dimostrazione. La geometria Euclidea è fondata sull'uso combinato delle seguenti operazioni elementari [9]:

1. Tracciare una circonferenza di assegnato centro C e raggio r ;
2. Determinare le intersezioni tra due circonferenze;
3. Determinare le intersezioni tra una retta e una circonferenza;
4. Determinare l'intersezione tra due rette.

Dimostrando che le suddette costruzioni sono realizzabili con l'uso del solo compasso, resta dimostrato il Teorema di Mohr-Mascheroni.

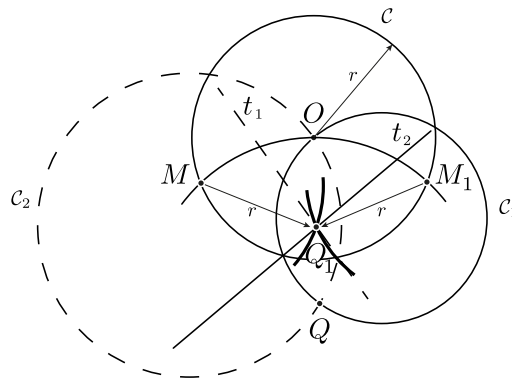
Le prime due operazioni sono immediatamente realizzate, mentre la terza è stata già discussa. Per quanto concerne la quarta osserviamo: Sia t una retta di cui si vuole determinare la circonferenza inversa.

Procedimento

- Si tracci la circonferenza C di centro O e raggio r , che intersechi la t .
- Sia P il piede della perpendicolare condotta da O a t .
- Sia P' il punto inverso di P , tale che $OP \cdot OP' = r^2$.
- La circonferenza C_1 , di diametro OP' , è quella inversa a t .

Determinare, con l'ausilio del solo compasso, l'intersezione Q_1 tra due rette t e t_1 .

- Si tracci una circonferenza C di centro O e raggio r , tale che intersechi t e t_1 .
- Si determinino le circonferenze C_1 e C_2 , rispettivamente inverse a t_2 e t_1 , considerando come polo dell'inversione O .



- Le circonferenze C_1 e C_2 si intersecano nel punto Q , il cui inverso Q_1 , rispetto al polo O , costituisce l'unico punto comune alle rette.

□

5 CONCLUSIONI

Dopo aver premesso alcune costruzioni propedeutiche, nonché l'operazione geometrica di inversione tra circonferenza e retta con l'uso del solo compasso, è stata discussa una dimostrazione del teorema di Mohr-Mascheroni.

RINGRAZIAMENTI

Gli autori desiderano ringraziare la Prof.ssa Anna Maria Gritti, docente presso il L.S.S. Lorenzo Mascheroni di Bergamo, per l'invito a contribuire con il presente articolo al Mascheroni Day.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. Descartes. *The Geometry of René Descartes*. Dover Publications Inc, 1954. translated form the French and Latin by D.E. Smith and M.L. Latham.
- [2] H. Geppert. Georg Mohr e la Geometria del Compasso. *Periodico di Matematiche*, IX(3):149–170, May 1929.
- [3] A. Adler. *Theorie der Geometrischen Konstruktionen*. G.J. Göschensche Verlagshandlung, 1906.
- [4] O. Byrne. *The Geometry of Compasses Or Problems Resolved By the Mere Description of Circles*. Crosby, Lockwood and Co., London, 1877.
- [5] Quemper de Lanascot, A. *Géométrie du Compas*. Librairie Scientifique Albert Blanchard, Paris, 1925.
- [6] D. Pedoe. *Circles - A Mathematical View*. Dover Publications Inc., New York, 1979.

- [7] A. Kostovskii. *Geometrical Constructions with Compasses Only*. Mir Publishers, Moscow, 1986.
- [8] F. Fabrizi and P. Pennestrì. *La Nuova Geometria del Compasso*. Rome, Ottobre 2011.
- [9] Robins H. Courant, R. and. *What is Mathematics?* Oxford University Press, 1941.
- [10] H. Dörrie. *100 Great Problems of Elementary Mathematics - Their History and Solutions*. Dover Publications, New York, 1965.
- [11] L. Mascheroni. *Problemi di Geometria dell'Abate Lorenzo Mascheroni colle Dimostrazioni del Capitano Sacchi*. Giovanni Silvestri, Milano, 1832.
- [12] J. Henderson, editor. *Greek Mathematical Works (Thales to Euclide) and (Aristarchuis to Pappus)*, volume I and II. Loeb Classical Library, 1939.