

Disamina di metodi di ottimizzazione fondati sull'impiego dei moltiplicatori di Lagrange

Pietro Pennestrì

Mat. 1694905

Elaborato Finale

corso di

Metodi Matematici Applicati all'Ingegneria

Indice

1	Fondamenti matematici	6
1.1	Ottimizzazione senza vincoli	6
1.1.1	Funzione ad una variabile	7
1.1.2	Funzione a più variabili	9
1.2	Ottimizzazione con vincoli di uguaglianza	12
1.2.1	Metodo delle variazioni vincolate	12
1.2.1.1	Caso Bidimensionale ($n = 2, m = 1$)	12
1.2.1.2	Caso Generale $m < n$	13
1.2.1.3	Condizioni necessarie	18
1.2.1.4	Condizioni sufficienti	19
1.2.1.5	Applicazione	19
1.2.2	Metodo dei moltiplicatori di Lagrange	22
1.2.2.1	Caso bidimensionale ($n = 2, m = 1$)	22
1.2.2.2	Caso generale ($m < n$)	24
1.2.2.3	Condizioni necessarie	25
1.2.2.4	Condizioni sufficienti	25
1.2.2.5	Minimizzazione di una funzione quadratica soggetta a vincoli lineari	26
1.2.2.6	Applicazione	29
1.2.2.7	Applicazione: Soluzione sistema sottodefinito di equazioni algebriche	31
2	Programmazione non lineare	33
2.1	Introduzione	33
2.2	Le condizioni generalizzate necessarie di Fritz John	34
2.3	Qualificazione dei vincoli di uguaglianza e disuguaglianza	41

Appendici

Appendice A Codici di calcolo	46
A.1 Programma Matlab	46

Premessa

Il presente report discute alcuni fondamenti della teoria dell'ottimizzazione, focalizzando l'attenzione sul metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Per risolvere il problema dell'equilibrio statico di corpi soggetti a vincoli, il metodo in oggetto fu introdotto da Lagrange [1] nella sua opera *Mécanique Analytique*.¹

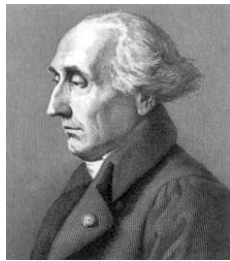


Figura 1: J.L. Lagrange (1736-1813)

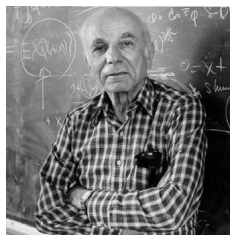
L'innovativo approccio consente di ridurre i problemi di Meccanica a problemi di Analisi, così come ben espresso dalla stesso Lagrange nella sua Prefazione:

On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnemens géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujéties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse, verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir étendu ainsi le domaine.

¹L'Appendice A del presente report include il testo originale dell'Opera di Lagrange in cui il metodo viene presentato.

Tuttavia, il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange* non si limita ai soli problemi di Meccanica, ma ha una valenza generale. La sempre attuale necessità ingegneristica di ottimizzazione di sistemi rende tale metodo un insostituibile strumento.

A partire dalla seconda metà del XX secolo, si registrano significativi contributi alla soluzione del problema dell'ottimizzazione non lineare vincolata.



Fritz John (1910-1994)



William Karush (1917-1997)



Harold Kuhn (1925-2014)



Albert Tucker (1905-1995)



Olvi Leon Mangasarian (1934-)

Figura 2: I fondatori della teoria NLP

Uno dei più noti criteri necessari di ottimo è quello dovuto ai matematici Harold Kuhn (1925-2014) e Albert Tucker (1905-1995) [2]. Tuttavia, le condizioni necessarie dedotte circa tre anni prima dal matematico Fritz John (1910-1994), per un'estensione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange, pur se originariamente limitate alla soluzione del problema con vincoli di disuguaglianza, appaiono più generali. Infatti, affinché il criterio di Kuhn - Tucker (KT) sia valido è necessario che i vincoli soddisfino determinate relazioni. Le condizioni di Kuhn-Tucker sono

spesso associate al nome di William Karush per il contributo di quest'ultimo nella propria tesi di Master [3].

Nel 1967 Mangasarian e Fromovitz [4] estendono le condizioni di ottimo al caso di vincoli di uguaglianza. Le condizioni di Fritz John nel presente report vengono dimostrate adottando proprio le fasi seguite da Mangasarian e Fromovitz.

Capitolo 1

Fondamenti matematici

1.1 Ottimizzazione senza vincoli

Premettiamo alcune definizioni. Una funzione $f(x)$, ha in $x = x^*$ ha:

- un **minimo relativo** o **locale** se

$$f(x^*) \leq f(x^* + h)$$

per qualsiasi valore di h sufficientemente piccolo;

- un **massimo relativo** o **locale** se

$$f(x^*) \geq f(x^* + h)$$

per qualsiasi valore di h sufficientemente piccolo;

- un **minimo assoluto** o **globale** se

$$f(x^*) \leq f(x)$$

per qualsiasi valore di x , nel dominio della funzione;

- un **minimo assoluto** o **globale** se

$$f(x^*) \geq f(x)$$

per qualsiasi valore di x , nel dominio della funzione;

1.1.1 Funzione ad una variabile

Il problema di ottimizzazione ad una variabile consiste nel determinare, nell'intervallo $[a, b]$, il valore x^* che minimizza $f(x)$.

A tal fine enunciamo i seguenti teoremi che forniscono le condizioni necessarie e sufficienti per le condizioni di minimo (massimo).

Teorema 1.1.1 (Condizione necessaria). *Se una funzione $f(x)$ è definita nell'intervallo $[a, b]$ ed ha un minimo relativo in $x = x^*$, con $x^* \in (a; b)$, ed ha derivata prima $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ finita in $x = x^*$, allora $f'(x^*) = 0$*

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che la derivata

$$f'(x^*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h} \quad (1.1)$$

è nulla. Poiché x^* per ipotesi è un minimo relativo, è valida la disuguaglianza

$$f(x^*) \leq f(x^* + h)$$

per h sufficientemente piccolo. Quindi, avremo:

$$\begin{aligned} \frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h} &\geq 0 \quad \text{se } h > 0 \\ \frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h} &\leq 0 \quad \text{se } h < 0 \end{aligned}$$

Stante la (1.1) risulta

$$f'(x^*) \geq 0 \quad (1.2)$$

quando $h \rightarrow 0^+$, mentre

$$f'(x^*) \leq 0 \quad (1.3)$$

quando $h \rightarrow 0^-$.

Affinché le (1.2) e (1.3) sussistano simultaneamente è necessario sia

$$f'(x^*) = 0 \quad (1.4)$$

□

Note. 1. Il teorema può essere esteso anche al caso in cui x^* sia un massimo relativo.

2. Il teorema non specifica il caso della non esistenza della derivata prima in x^* .
3. Il teorema non si applica al caso in cui x^* sia un punto estremo dell'intervallo di definizione della funzione. Infatti in questo caso si potrà soltanto definire la derivata prima sinistra o destra.
4. Il teorema non garantisce l'esistenza di un massimo o di un minimo nell'intervallo di definizione. In generale x^* è un **punto di stazionarietà** quando $f'(x^*) = 0$

Teorema 1.1.2 (Condizione sufficiente). *Se*

$$f'(x^*) = f''(x^*) = \dots = f^{(n-1)}(x^*) = 0 \quad (1.5)$$

ma

$$f^{(n)}(x^*) \neq 0 \quad (1.6)$$

per $f(x^)$ sussistono i seguenti casi:*

- i) sarà un minimo di $f(x)$ se $f^{(n)}(x^*) > 0$ ed n pari;*
- ii) sarà un massimo di $f(x)$ se $f^{(n)}(x^*) < 0$ ed n pari;*
- iii) non sarà massimo o minimo per n dispari*

Dimostrazione. Espandendo in serie di Taylor si ha che:

$$\begin{aligned} f(x^* + h) = & f(x^*) + hf'(x^*) + \frac{h^2}{2!}f''(x^*) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x^*) \\ & + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x^* + \theta h) \quad \text{con } \theta \in (0; 1) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Considerate le uguaglianze (1.5), la (1.7) diventa:

$$f(x^* + h) - f(x^*) = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x^* + \theta h) \quad (1.8)$$

Per $f^{(n)}(x^*) \neq 0$ esiste un intorno di x^* in cui la derivata prima $f'(x)$ mantiene lo stesso segno, ad esempio, quello di $f^{(n)}(x^*)$.

- Se n è pari la quantità $\frac{h^n}{n!}$ è sempre positiva indipendentemente dal segno di h , pertanto $f(x^* + h) - f(x^*)$ e $f^{(n)}(x^*)$ avranno lo stesso segno. Quindi, x^* sarà un minimo (massimo) se $f(x^* + h) - f(x^*)$ positiva (negativa).

- Se n è dispari la quantità $\frac{h^n}{n!}$ cambia con il segno di h e x^* non sarà nè un massimo nè un minimo, ma un **punto di flesso**.

□

1.1.2 Funzione a più variabili

Definizione 1.1.1 (Differenziale r^{esimo} di una funzione $f(\mathbf{x})$). Se esistono e sono continue tutte le derivate parziali in \mathbf{x}^* , per $r \geq 1$, della funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, il polinomio

$$d^r f(\mathbf{x}^*) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dots \sum_{k=1}^n}_{\text{Somma rispetto a } r} h_i h_j \dots h_k \frac{\partial^r f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i \partial x_j \dots \partial x_k} \quad (1.9)$$

costituisce il differenziale r^{esimo} di $f(\mathbf{x})$ in \mathbf{x}^* .

Ad esempio per $r = 2$ ed $n = 3$ dalla (1.9) si ha:

$$\begin{aligned} d^2 f(\mathbf{x}^*) &= d^2 f(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 h_i h_j \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}^*) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}^*) + h_3^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(\mathbf{x}^*) \\ &\quad + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + 2h_2 h_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} + 2h_1 h_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \end{aligned} \quad (1.10)$$

L'espansione in serie di Taylor di $f(\mathbf{x})$ in un intorno del punto \mathbf{x}^* è espressa da:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}^*) + df(\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2!} d^2 f(\mathbf{x}^*) + \frac{1}{3!} d^3 f(\mathbf{x}^*) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{n!} d^{(n)} f(\mathbf{x}^*) + R_n(\mathbf{x}^*, \mathbf{h}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

dove con $R_n(\mathbf{x}^*, \mathbf{h})$ si intende il resto, analiticamente espresso da:

$$R_n(\mathbf{x}^*, \mathbf{h}) = \frac{1}{(n+1)!} d^{(n+1)} f(\mathbf{x}^* + \theta \mathbf{h})$$

con $\theta \in (0; 1)$ e $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$.

Teorema 1.1.3 (Condizione Necessaria). Sia f una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f \in C^1(A)$, con A un aperto di \mathbb{R}^n . Se $f(\mathbf{x})$ raggiunge un valore estremo (massimo o minimo) per $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* \in A$, allora risulterà:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} = 0 \quad (1.12)$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che una generica derivata parziale k^{esima} non sia nulla. Pertanto, espandendo la funzione $f(\mathbf{x})$ in serie di Taylor, si ha:

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} + R_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{h}) \quad (1.13)$$

da cui

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^*) = h_k \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} + \frac{1}{2!} d^2 f(\mathbf{x}^* + \theta \mathbf{h}) \quad \text{con } \theta \in (0; 1) \quad (1.14)$$

Osservando che $d^2 f(\mathbf{x}^* + \theta \mathbf{h})$ è proporzionale a h^2 , per h piccoli, la suddetta quantità può essere trascurata ed i termini che domineranno nell'espressione saranno quelli del primo ordine. Pertanto il segno di $f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^*)$ è concorde a quello di $h_k \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i}$. In particolare, se assumiamo positivo il segno di $\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i}$, la quantità $f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^*)$ risulta anch'essa positiva (negativa) per $h_k > 0$ ($h_k < 0$). Tale conclusione contraddice l'ipotesi che esista la derivata. \square

Teorema 1.1.4 (Condizione Sufficiente). Una condizione sufficiente affinché un punto di stazionarietà \mathbf{x}^* sia punto di massimo o di minimo è che la matrice Hessiana di $f(\mathbf{x})$, valutata in \mathbf{x}^* sia:

- i) Definita positiva, affinché \mathbf{x}^* corrisponda ad un minimo.
- ii) Definita negativa, affinché \mathbf{x}^* corrisponda ad un massimo.

Dimostrazione. Dall'espansione in serie di Taylor della funzione si ha che:

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^* + \theta \mathbf{h})}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1.15)$$

con $\theta \in (0; 1)$ Se per ipotesi \mathbf{x}^* è un punto stazionario si avrà

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.16)$$

La (1.15) si può quindi riscrivere come:

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^* + \theta \mathbf{h})}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1.17)$$

Per la continuità della seconda derivata parziale di $f(\mathbf{x})$, in un intorno di \mathbf{x}^* , possiamo assumere che le quantità $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^* + \theta \mathbf{h})}{\partial x_i \partial x_j}$ e $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i \partial x_j}$ abbiano lo stesso segno per \mathbf{h} opportuni. Il segno di $f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^*)$ è quindi deciso dalla quantità

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^* + \theta \mathbf{h})}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1.18)$$

la (1.18) essendo una forma quadratica può essere riscritta nella forma:

$$Q = \mathbf{h}^T \mathbf{J}(\mathbf{x}^*) \mathbf{h} \quad (1.19)$$

con $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right]$ matrice Jacobiana.

Dall'algebra è noto che:

- Se Q è una quantità positiva (\mathbf{x}^* è un minimo per f) $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$ sarà definita positiva;
- se Q è una quantità negativa (\mathbf{x}^* è un massimo per f) $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$ sarà definita negativa;

□

Note. Appare evidente che il teorema cade in difetto quando la matrice $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$ è semidefinita (positiva o negativa). A questo proposito enunciamo ora un Teorema che estende anche a tali casi lo studio dei massimi e dei minimi.

Teorema 1.1.5. *Siano le derivate parziali di f di ordine $k \geq 2$ continue in un intorno del punto stazionario \mathbf{x}^* . Siano inoltre valide le seguenti condizioni:*

$$d^r f(\mathbf{x}^*) = 0, \quad 1 \leq r \leq k - 1 \quad (1.20a)$$

$$d^k f(\mathbf{x}^*) \neq 0. \quad (1.20b)$$

Distinguiamo i seguenti casi:

- i) Se k è pari e $d^k f(\mathbf{x}^*)$ è definita positiva, \mathbf{x}^* è un punto di minimo relativo
- ii) Se k è pari e $d^k f(\mathbf{x}^*)$ è definita negativa, \mathbf{x}^* è un punto massimo relativo
- iii) Se k è dispari nessuna conclusione può essere tratta su \mathbf{x}^*

1.2 Ottimizzazione con vincoli di uguaglianza

Nel presente paragrafo viene affrontata l'ottimizzazione di funzioni continue soggette a vincoli di uguaglianza. Siano:

$$\begin{aligned} f, g : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ f, g &\in C^1(A) \end{aligned}$$

dove A è un aperto di \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} \text{Minimizzare } f = f(\mathbf{x}), \text{ con } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{soggetta a} \\ g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Nel seguito assumeremo sempre $m < n$, in caso contrario il problema diventa sovradefinito e nella maggior parte dei casi non avrà soluzione.

1.2.1 Metodo delle variazioni vincolate

L'idea alla base del *metodo delle variazioni vincolate* è quella di determinare un'espressione in forma chiusa del differenziale df per tutti i punti per cui $g_i(\mathbf{x}) = 0$, ($i = 1, 2, \dots, m$) è soddisfatta. Per fissare le idee il metodo verrà sviluppato per $n = 2$ e $m = 1$.

1.2.1.1 Caso Bidimensionale ($n = 2, m = 1$)

$$\text{Minimizzare } f(x_1, x_2) \text{ soggetta a } g(x_1, x_2) = 0$$

In generale, affinché ad x^* corrisponda un minimo di $f(\mathbf{x})$ è necessario sia:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} = 0$$

ovvero:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (1.21)$$

Poiché il vincolo impone $g(x_1^*, x_2^*) = 0$, possiamo ragionevolmente assumere

$$g(x_1^* + dx_1, x_2^* + dx_2) = 0 \quad (1.22)$$

L'espansione in serie di Taylor della (1.22) in un intorno del punto (x_1^*, x_2^*) conduce a

$$g(x_1^* + dx_1, x_2^* + dx_2) \approx g(x_1^*, x_2^*) + \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (1.23)$$

ovvero:

$$dx_1 = \frac{-\frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} dx_2}{\frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}} \quad (1.24)$$

Sostituendo la (1.24) nella (1.21) otteniamo:

$$\left(-\frac{\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}}{\frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}} \frac{\frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}}{\frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}} + \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \right) dx_2 = 0 \quad (1.25)$$

ovvero:

$$\boxed{-\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} + \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = 0} \quad (1.26)$$

equazione la cui soluzione conduce all'ottimo.

Nel caso bidimensionale, la relazione ottenuta ha un'interessante interpretazione geometrica. Le derivate di f e g rappresentano i parametri direttori delle tangenti alle curve di livello di f e g , rispettivamente. Poiché nella soluzione ottimale tali rette dovranno essere parallele, il prodotto vettoriale dei versori con componenti i parametri direttori deve essere nullo.

1.2.1.2 Caso Generale $m < n$

Ci si propone di estendere le considerazioni svolte per il caso bidimensionale a quelle relative al caso generale:

Si calcoli il vettore \mathbf{x}^* che minimizza $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f \in C^1$ e soddisfi i vincoli algebrici

$$g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, m < n. \quad (1.27)$$

Generalizzando la (1.23) otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial g_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} dx_n &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial g_m(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g_m(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial g_m(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} dx_n &= 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

Introdotta il vettore delle incognite

$$d\mathbf{x}_{1 \div m} = \{ dx_1 \quad dx_2 \quad \dots \quad dx_m \}^T,$$

la matrice dei coefficienti

$$\mathbf{J} \begin{pmatrix} g_1, \dots, g_m \\ x_1, \dots, x_m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m(\mathbf{x}^*)}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

e il vettore dei termini noti

$$\mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial g_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_{m+1}} - \frac{\partial g_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_{m+2}} - \dots - \frac{\partial g_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots \\ -\frac{\partial g_m(\mathbf{x}^*)}{\partial x_{m+1}} - \frac{\partial g_m(\mathbf{x}^*)}{\partial x_{m+2}} - \dots - \frac{\partial g_m(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{array} \right\} \quad (1.30)$$

il sistema può quindi scriversi nella forma compatta:

$$\mathbf{J} \begin{pmatrix} g_1, \dots, g_m \\ x_1, \dots, x_m \end{pmatrix} d\mathbf{x}_{1 \div m} = \mathbf{v}. \quad (1.31)$$

Affinché il sistema (1.31) ammetta soluzione è necessario sia:

$$\boxed{\det \mathbf{J} \begin{pmatrix} g_1, \dots, g_m \\ x_1, \dots, x_m \end{pmatrix} \neq 0} \quad (1.32)$$

La k^{ma} componente contenuta nel vettore $d\mathbf{x}_{1 \div m}$ può esprimersi nella forma

$$dx_k = \frac{\det \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & v_1 & \dots & \frac{\partial g_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & v_m & \dots & \frac{\partial g_m(\mathbf{x}^*)}{\partial x_m} \end{bmatrix}}{\det \mathbf{J} \begin{pmatrix} g_1, \dots, g_m \\ x_1, \dots, x_m \end{pmatrix}} \quad (1.33)$$

Sviluppando la (1.33) si ottiene

$$\begin{aligned}
& \det \mathbf{J} \left(\frac{g_1, \dots, g_m}{x_1, \dots, x_m} \right) dx_k \\
&= (-1)^{(k+1)+1} \underbrace{\left(\sum_{i=m+1}^n \frac{\partial g_1}{\partial x_i} dx_i \right)}_{-v_1} \det \mathbf{J} \left(\frac{\bigcup_{i=1}^m g_i - g_1}{\bigcup_{i=1}^m x_i - x_k} \right) \\
&+ \dots (-1)^{(k+m)+1} \underbrace{\left(\sum_{i=m+1}^n \frac{\partial g_m}{\partial x_i} dx_i \right)}_{-v_m} \det \mathbf{J} \left(\frac{\bigcup_{i=1}^m g_i - g_m}{\bigcup_{i=1}^m x_i - x_k} \right) \\
&= dx_{m+1} \left((-1)^{(k+1)+1} \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+1}} \det \mathbf{J} \left(\frac{\bigcup_{i=1}^m g_i - g_1}{\bigcup_{i=1}^m x_i - x_k} \right) + \dots \right. \\
&+ (-1)^{(k+m)+1} \frac{\partial g_m}{\partial x_{m+1}} \det \mathbf{J} \left(\frac{\bigcup_{i=1}^m g_i - g_m}{\bigcup_{i=1}^m x_i - x_k} \right) \left. + \dots + dx_n(\dots) \right) \\
&= dx_{m+1} \left(\sum_{j=1}^m (-1)^{(k+j)+1} \frac{\partial g_j}{\partial x_{m+1}} \det \mathbf{J} \left(\frac{\bigcup_{i=1}^m g_i - g_j}{\bigcup_{i=1}^m x_i - x_k} \right) \right) + \dots + dx_n(\dots)
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Sostituendo nella (1.21) i risultati della (1.34) si ha:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f}{\partial x_1} \det \mathbf{J} \left(\frac{g_1, \dots, g_m}{x_1, \dots, x_m} \right) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \det \mathbf{J} \left(\frac{g_1, \dots, g_m}{x_1, \dots, x_m} \right) dx_2 \\
& + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \det \mathbf{J} \left(\frac{g_1, \dots, g_m}{x_1, \dots, x_m} \right) dx_n \tag{1.35} \\
& = dx_{m+1} \left(\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j+1} \frac{\partial g_j}{\partial x_{m+1}} \det \mathbf{J} \left(\frac{\bigcup_{t=1}^m g_t - g_j}{\bigcup_{t=1}^m x_t - x_i} \right) \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} \det \mathbf{J} \left(\frac{g_1, \dots, g_m}{x_1, \dots, x_m} \right) \right) + \dots + dx_n (\dots) \\
& = \sum_{\ell=m+1}^n dx_\ell \left(\left(\sum_{i=1}^m (-1)^i \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} \frac{\partial g_j}{\partial x_\ell} \det \mathbf{J} \left(\frac{\bigcup_{t=1}^m g_t - g_j}{\bigcup_{t=1}^m x_t - x_i} \right) \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial f}{\partial x_\ell} \det \mathbf{J} \left(\frac{g_1, \dots, g_m}{x_1, \dots, x_m} \right) \right) = 0 \tag{1.36}
\end{aligned}$$

Affinché la (1.36) sia vera è necessario che ogni coefficiente di $dx_\ell, \forall \ell \in [m+1; n]$ sia nullo. Tali coefficienti possono essere espressi sotto forma di determinante ovvero:

$$\sum_{\ell=m+1}^n \det \left(\begin{array}{c|ccc} \frac{\partial f}{\partial x_\ell} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \\ \hline \frac{\partial g_1}{\partial x_\ell} & \mathbf{J} \left(\frac{g_1, \dots, g_m}{x_1, \dots, x_m} \right) & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_\ell} & & & \end{array} \right) dx_\ell = 0. \tag{1.37}$$

1.2.1.3 Condizioni necessarie

Abbiamo gli elementi per stabilire delle relazioni utili per la ricerca dell'ottimo di una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$ soggetta a vincoli di uguaglianza $g_j(\mathbf{x}) = 0$, ($j = 1, \dots, m < n$), dove si intende la generica funzione $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g_j \in C_1$

Riassumendo si può osservare che:

- Ciascuna equazione di vincolo $g_j(\mathbf{x}) = 0$, per $j = 1, 2, \dots, m$ da luogo ad un'equazione lineare nelle variazioni dx_i , per $i = 1, 2, \dots, n$.
- Si forma quindi il sistema (1.31) di m equazioni in $n > m$ incognite. In tal modo i differenziali dx_i presenti in df sono espressi in funzione di $n - m$ differenziali indipendenti (dx_{m+1}, \dots, dx_n).
- Imponendo siano nulli i coefficienti dei suddetti $n - m$ differenziali indipendenti si ottengono le **condizioni necessarie** per l'esistenza della soluzione del problema di ottimo:

$$\det \mathbf{J} \left(\begin{array}{c} g_1, \dots, g_m \\ x_1, \dots, x_m \end{array} \right) \neq 0 \quad (1.38a)$$

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial f}{\partial x_\ell} & \frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_m} \\ \hline \frac{\partial g_1}{\partial x_\ell} & \mathbf{J} \left(\begin{array}{c} g_1, \dots, g_m \\ x_1, \dots, x_m \end{array} \right) \\ \vdots & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_\ell} & \end{array} \right) = 0 \quad \forall \ell \in [m+1; n] \quad (1.38b)$$

1.2.1.4 Condizioni sufficienti

In teoria, con m vincoli si potrebbe esprimere f solamente in funzione di x_{m+1}, \dots, x_n . L'espansione in serie di Taylor della funzione f può quindi essere scritta come

$$f(\mathbf{x}^* + d\mathbf{x}^*) \approx f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=m+1}^n \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} \right) dx_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=m+1}^n \left(\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_i dx_j \quad (1.39)$$

Si osserva che \mathbf{x}^* è un punto stazionario la (1.39) quindi può essere riscritta come

$$f(\mathbf{x}^* + d\mathbf{x}^*) - f(\mathbf{x}^*) \approx \sum_{i=m+1}^n \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} \right) dx_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=m+1}^n \left(\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_i dx_j = Q \quad (1.40)$$

condizione sufficiente Q sia un minimo (massimo) è che Q sia definita positiva (negativa).

Osservazione

Ricordiamo che esprimere f solamente in funzione di x_{m+1}, \dots, x_n non è sempre possibile. Pertanto, il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, discusso in seguito, è comunemente usato per risolvere problemi con vincoli di uguaglianza.

1.2.1.5 Applicazione

Il seguente esempio ha lo scopo di evidenziare l'importanza teorica del risultato precedentemente ottenuto nella scelta del set di variabili indipendenti.

$$\text{Minimizzare } f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$$

soggetta a

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 10 = 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 15 = 0$$

Poiché $n = 4$ ed $m = 2$, avrò $n - m = 2$ variabili indipendenti.

In prima battuta, suddividiamo le variabili in *dipendenti* e *indipendenti* secondo la Tabella 1.1.

Tabella 1.1: Suddivisione tra variabili dipendenti ed indipendenti: I tentativo

Variabili dipendenti	Variabili indipendenti
x_1, x_2	x_3, x_4

Valutando

$$\det \mathbf{J} \left(\begin{array}{c} g_1, g_2 \\ x_1, x_2 \end{array} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.41)$$

Quindi la condizione (1.38a)

$$\det \mathbf{J} \left(\begin{array}{c} g_1, g_2 \\ x_1, x_2 \end{array} \right) \neq 0 \quad (1.42)$$

non è rispettata ed **il metodo non si può applicare** con la suddivisione delle variabili riportata in Tabella 1.1.

Occorre quindi variare la suddivisione tra variabili dipendenti ed indipendenti adottando quella indicata in Tabella 1.2.

Tabella 1.2: Suddivisione tra variabili dipendenti ed indipendenti: II tentativo

Variabili dipendenti	Variabili indipendenti
x_1, x_3	x_2, x_4

In tal caso, poiché

$$\det \mathbf{J} \left(\begin{array}{c} g_1, g_2 \\ x_1, x_3 \end{array} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad (1.43)$$

la prima condizione (1.38a) è soddisfatta e si può procedere nell'ottimizzazione. Si valutano quindi i determinanti 1.38b:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_3} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_1 & x_3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2x_2 - 4x_1 = 0, \quad (1.44a)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_4} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_4} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_4} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 2x_4 - 7x_1 - x_3 = 0 \quad (1.44b)$$

e si deducono le relazioni

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 \\ x_3 = 2x_4 - \frac{7}{2}x_2 \end{cases} \quad (1.45)$$

che vanno a formare un sistema di $n = 4$ equazioni, assieme alle condizioni di vincolo,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 \\ x_3 = 2x_4 - \frac{7}{2}x_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 10 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 15 = 0 \end{cases} \quad (1.46)$$

la cui soluzione fornisce quella del problema di ottimo

$$\mathbf{x}^* = \left\{ -\frac{5}{74} \quad -\frac{5}{37} \quad -\frac{155}{74} \quad -\frac{30}{37} \right\}^T \quad (1.47)$$

1.2.2 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Le caratteristiche del metodo dei moltiplicatori di Lagrange saranno inizialmente discusse per il caso di ottimizzazione di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$ soggetta ad un vincolo $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in C^1$

1.2.2.1 Caso bidimensionale ($n = 2$, $m = 1$)

Minimizzare $f(x_1, x_2)$

soggetta a

$$g(x_1, x_2) = 0$$

Definiamo, secondo Lagrange, la nuova funzione obiettivo L :

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2) \quad (1.48)$$

con λ quantità incognita che prende il nome di moltiplicatore di Lagrange. Osserviamo che il punto di ottimo (x_1^*, x_2^*) della funzione L coincide con quello della funzione f . L'artificio introdotto da Lagrange permette di trasformare il problema di ottimo vincolato in uno di ottimizzazione non vincolata.

Applicando alla (1.48) le condizioni necessarie di estremo si ottiene il sistema:

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 \quad (1.49a)$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \quad (1.49b)$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = g(x_1, x_2) = 0 \quad (1.49c)$$

Eliminando λ dalle (1.49a) e (1.49b) si ottiene la (1.26)

$$-\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} + \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = 0$$

Esempio

L'esempio della ricerca dell' ottimo con soluzione vincolata ad uguaglianza qui discusso è tratto da Loreti [5], p.20.

$$\begin{cases} \max_{x,y} f(x,y) = 4xy \\ g(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \quad (1.50)$$

Al fine di interpretare il risultato

$$L(x,y,\lambda) = 4xy + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (1.51)$$

Si calcolano i punti stazionari della funzione L imponendo siano nulle le derivate

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 4y + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 4x + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases} \quad (1.52)$$

Dalla prima equazione

$$\lambda = -\frac{2a^2y}{x} \quad (1.53)$$

Sostituendo quest'ultima nelle rimanenti equazioni si ha

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad (1.54)$$

$$x^2 = \frac{a^2}{2} \quad (1.55)$$

la cui soluzione positiva è

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad (1.56)$$

Dunque

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{b}{\sqrt{2}} \quad (1.57)$$

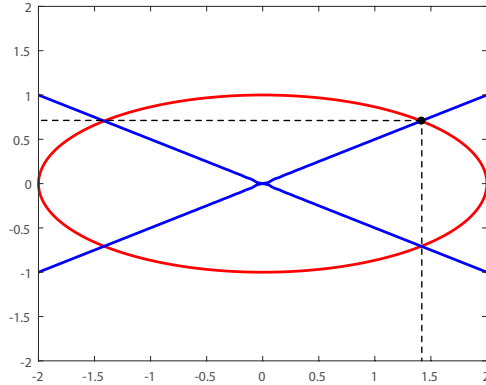


Figura 1.1: Verifica grafica del risultato del problema di ottimo vincolato tratto da Loreti [5]

Per una verifica grafica del risultato è stato implementato un programma in Matlab il cui listato è riportato in Appendice. Assumendo $a = 2$ e $b = 1$, dalla Figura 1.1 si osserva che il punto comune tra le curve di livello della funzione $z = 4xy$ (tratto blu) e la $g(x, y) = 0$ (tratto rosso) è proprio nel punto calcolato. I rimanenti tre punti vengono scartati in quanto non soddisfano le condizioni $x > 0$, $y > 0$ richieste.

1.2.2.2 Caso generale ($m < n$)

Estendiamo al caso generale di n variabili ed m vincoli le considerazioni svolte nel precedente paragrafo:

$$\text{Minimizzare } f(\mathbf{x})$$

soggetta a

$$g_j(\mathbf{x}) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

La nuova funzione obiettivo L costituita da $(n + m)$ variabili è definita come segue:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_m g_m(\mathbf{x}) \quad (1.58)$$

1.2.2.3 Condizioni necessarie

Le condizioni necessarie affinché L abbia un estremo sono le seguenti:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0, \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n \quad (1.59a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = g_j(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, m \quad (1.59b)$$

Le equazioni (1.59) formano un sistema di $(n + m)$ equazioni nelle $(n + m)$ incognite x_1, x_2, \dots, x_n e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$

1.2.2.4 Condizioni sufficienti

Teorema 1.2.1. *La condizione sufficiente affinché la funzione $f(\mathbf{x})$ abbia un minimo (massimo) relativo in \mathbf{x}^* è che la funzione quadratica*

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \quad (1.60)$$

valutata in $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ sia definita positiva (negativa), per tutti i valori di $d\mathbf{x}$ che soddisfano i vincoli.

La dimostrazione è del tutto analoga a quella del Teorema 1.1.4, discusso a p. 10. A tale proposito, appare utile richiamare la condizione necessaria, enunciata da Hancock [6] e dimostrata nel successivo paragrafo, affinché una forma quadratica Q sia definita positiva:

In particolare affinché Q sia definita positiva (negativa) per tutte le variazioni possibili $d\mathbf{x}$, è necessario che siano positive (negative) tutte le radici del polinomio in μ ottenuto espandendo il determinante

$$\det \begin{bmatrix} L_{11} - \mu & L_{12} & L_{13} & \dots & L_{1n} & g_{11} & g_{21} & \dots & g_{m1} \\ L_{21} & L_{22} - \mu & L_{23} & \dots & L_{2n} & g_{12} & g_{22} & \dots & g_{m2} \\ \vdots & & & & & & & & \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \dots & L_{nn} - \mu & g_{1n} & g_{2n} & \dots & g_{mn} \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & \dots & g_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \dots & g_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ g_{m1} & g_{m2} & g_{m3} & \dots & g_{mn} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (1.61)$$

ove

$$L_{ij} = \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1.62a)$$

$$g_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}. \quad (1.62b)$$

1.2.2.5 Minimizzazione di una funzione quadratica soggetta a vincoli lineari

Si voglia risolvere il seguente problema di ottimizzazione

$$\text{Minimizzare } f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} x_i x_j, \quad A_{ij} = A_{ji} \quad (1.63)$$

soggetta a

$$g_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (1.64)$$

Senza perdita di generalità, si normalizzino le variabili in modo che risulti

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1. \quad (1.65)$$

A tal fine qualora dovesse risultare

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \rho^2 \quad (1.66)$$

imporremo la sostituzione

$$x_i \rightarrow \frac{x_i}{\rho} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.67)$$

Essendo le funzioni di vincolo lineari omogenee, la sostituzione di variabili (1.67) non altera le (1.80), mentre la funzione da ottimizzare si presenterà nella forma

$$f\left(\frac{x_1}{\rho}, \frac{x_2}{\rho}, \dots, \frac{x_n}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho^2} \quad (1.68)$$

e le variabili varieranno nell'intervallo $[-1; 1]$. Poiché la funzione f è continua ci sarà nell'intervallo di definizione un massimo ed un minimo locale. Se ad f corrisponde un minimo positivo, la forma quadratica f sarà positiva definita.

Sulla base del metodo dei moltiplicatori di Lagrange si potrà formare la seguente funzione obiettivo:

$$f^* = f - \mu \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 \right) - 2 \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j \quad (1.69)$$

in cui μ, λ_j , ($j = 1, 2, \dots, m$) sono i moltiplicatori di Lagrange. Le condizioni necessarie affinché la f^* abbia un minimo sono

$$\frac{\partial f^*}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.70)$$

ovvero:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - 2\mu x_i + 2 \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.71)$$

Da quest'ultima, tenuto conto delle (1.79) e (1.80) e dividendo per due, segue¹

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j - \mu x_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{ji} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.72)$$

1

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^m A_{ij} x_j \right)$$

$$A_{ij} = A_{ji}$$

$$f(\mathbf{x}) = x_1 \left(\sum_{j=1}^m A_{1j} x_j \right) + x_2 \left(\sum_{j=1}^m A_{2j} x_j \right) + \dots + x_n \left(\sum_{j=1}^m A_{nj} x_j \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} &= 2A_{11}x_1 + \sum_{j=2}^n A_{1j}x_j + A_{21}x_2 + \dots + A_{n1}x_n \\ &= \sum_{j=1}^n A_{1j}x_j + \sum_{j=1}^n A_{j1}x_j = 2 \sum_{j=1}^n A_{1j}x_j \end{aligned}$$

In definitiva, generalizzando il precedente risultato, resta dimostrata l'uguaglianza:

$$\boxed{\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 2 \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j}$$

In definitiva la soluzione sarà contenuta nel sistema di $(n + m + 1)$ equazioni nelle $(n + m + 1)$ incognite $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \mu$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j - \mu x_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{ji} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 = 0 \end{array} \right. \quad (1.73)$$

Dalle ipotesi di continuità di f siamo certi dell'esistenza dell'estremo. Pertanto, il sistema di equazioni lineari omogenee, formato dalle prime 2 equazioni del (1.73), dovrà avere soluzione reale ed il seguente determinante sarà nullo

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} - \mu & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ A_{21} & A_{22} - \mu & A_{23} & \dots & A_{2n} & a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & & & & & & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} - \mu & a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (1.74)$$

Tale determinante darà luogo ad un'equazione polinomiale di grado $n - m$ in μ . Il vettore soluzione corrispondente al minimo di f dovrà necessariamente contenere una delle radici del polinomio in μ .

Se moltiplichiamo la prima equazione delle (1.73) per x_1, x_2, \dots, x_n , tenuto conto delle rimanenti equazioni del sistema, la somma delle espressioni ottenute conduce all'uguaglianza

$$f = \mu \quad (1.75)$$

grazie alla quale possiamo affermare che il segno del minimo di f coincide con il segno di μ . Ovvero, se μ è positivo f sarà positiva definita.

Le considerazioni svolte conducono quindi al seguente enunciato dovuto ad Hancock [6]:

Teorema 1.2.2. *Affinché la funzione omogenea quadratica*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij} x_i x_j \quad A_{ij} = A_{ji} \quad (1.76)$$

sia definita positiva per i valori di x_1, x_2, \dots, x_n che soddisfano i vincoli omogenei lineari

$$g_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (1.77)$$

è necessario e sufficiente che la soluzione dell'equazione polinomiale

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} - \mu & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ A_{21} & A_{22} - \mu & A_{23} & \dots & A_{2n} & a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & & & & & & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} - \mu & a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (1.78)$$

in μ abbia solo radici positive.

1.2.2.6 Applicazione

Si voglia risolvere il seguente problema di ottimizzazione: Trovare le dimensioni di un cilindro in cui, per una superficie totale pari ad $A_0 = 24\pi$, il volume sia massimo.

$$\text{Massimizzare } f(x_1, x_2) = \pi x_1^2 x_2 \quad (1.79)$$

soggetta a

$$2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2 = A_0 \quad (1.80)$$

La funzione di Lagrange risulta essere

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \pi x_1^2 x_2 + \lambda (2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2 - A_0) \quad (1.81)$$

e le condizioni necessarie di ottimo forniscono

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2\pi x_1 x_2 + 4\pi \lambda x_1 + 2\pi \lambda x_2 = 0 \quad (1.82a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \pi x_1^2 + 2\pi \lambda x_1 = 0 \quad (1.82b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2 - A_0 = 0 \quad (1.82c)$$

Dalle prime due

$$\lambda = -\frac{x_1 x_2}{2x_1 + x_2} = -\frac{x_1}{2},$$

ovvero

$$x_1 = \frac{x_2}{2}.$$

In definitiva, la soluzione ottima ottenuta risulta essere

$$x_1^* = \sqrt{\frac{A_0}{6\pi}}, \quad x_2^* = \sqrt{\frac{2A_0}{3\pi}}, \quad \lambda^* = -\sqrt{\frac{A_0}{24\pi}}.$$

Per $A_0 = 24\pi$ quest'ultima diventa

$$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 4, \quad \lambda^* = -1.$$

Per verificare che la soluzione corrisponda ad un massimo applichiamo la condizione sufficiente stabilita con il Teorema 1.2.2, ovvero verifichiamo che l'equazione (1.78) abbia solo radici negative.

In tal caso

$$L_{11} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} \Big|_{\mathbf{x}^*, \lambda^*} = 2\pi x_2^* + 4\pi \lambda^* = 0 \quad (1.83a)$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{\mathbf{x}^*, \lambda^*} = 2\pi x_1^* + 2\pi \lambda^* = 2\pi \quad (1.83b)$$

$$L_{22} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \Big|_{\mathbf{x}^*, \lambda^*} = 0 \quad (1.83c)$$

$$g_{11} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \Big|_{\mathbf{x}^*, \lambda^*} = 4\pi x_1^* + 2\pi x_2^* = 16\pi \quad (1.83d)$$

$$g_{12} = \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \Big|_{\mathbf{x}^*, \lambda^*} = 2\pi x_1^* = 4\pi \quad (1.83e)$$

ed il determinante (1.78) si particolarizza come segue

$$\det \begin{bmatrix} 4\pi - z & 2\pi & 16\pi \\ 2\pi & 0 - z & 4\pi \\ 16\pi & 4\pi & 0 \end{bmatrix} = 0 ,$$

ovvero

$$272\pi^2 z + 192\pi^3 = 0$$

Avendo la radice $z = -\frac{12}{17}\pi$ un valore negativo, rimane confermato che l'ottimo calcolato corrisponde ad un massimo.

1.2.2.7 Applicazione: Soluzione sistema sottodefinito di equazioni algebriche

Sia

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (1.84)$$

un sistema lineare di equazioni in cui \mathbf{A} è una matrice rettangolare con **numero di righe inferiore a quello delle colonne**.

Un tale sistema, com'è noto, possiede **infinite soluzioni**. Tuttavia, si vuole individuare quella con la minima norma euclidea.

Il problema può quindi formularsi come segue:

$$\min \mathbf{x}^T \mathbf{x}$$

con il vincolo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Formeremo, in primo luogo, la **funzione lagrangiana estesa**

$$L = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) , \quad (1.85)$$

ove $\boldsymbol{\lambda}$ è il vettore dei moltiplicatori di Lagrange.

Applicando la condizione di stazionarietà

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} ,$$

si ha

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} . \quad (1.86)$$

Imponendo

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (1.87)$$

e combinando tale risultato con (1.86) discende

$$\lambda = 2 (\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)^{-1} \mathbf{b} ,$$

ovvero

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{A}^\top (\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)^{-1} \mathbf{b} ,} \quad (1.88)$$

la soluzione algebrica del nostro problema di ottimizzazione vincolata.

Si osserva che l'espressione (1.88) corrisponde alla definizione della *pseudoinversa* di una matrice con numero delle righe è inferiore a quello delle colonne. Tuttavia, l'uso per il calcolo numerico è sconsigliato in quanto il prodotto $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ è spesso una matrice mal condizionata.

Capitolo 2

Programmazione non lineare

2.1 Introduzione

La formulazione generale dei problemi di programmazione non lineare (NLP) si presenta nella forma:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizzare } \theta(\mathbf{x}) \text{ soggetta ai seguenti vincoli} \\ & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i \in M = \{1, 2, \dots, m\} \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j \in K = \{1, 2, \dots, k\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove $\theta(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$ e $h_j(\mathbf{x})$ sono funzioni definite su uno spazio Euclideo n -dimensionale E^n ed hanno derivate parziali prime continue su E^n .

I criteri di ottimo, possono essere suddivisi in due categorie:

- **Necessari:** Se \mathbf{x}^* è soluzione del problema (2.1), le relazioni che legano $\theta(\mathbf{x}^*)$, $g_i(\mathbf{x}^*)$ e $h_j(\mathbf{x}^*)$ sono considerate condizioni necessarie.
- **Sufficienti:** In taluni problemi sarà possibile stabilire un insieme di condizioni grazie alle quali si garantisce che un punto \mathbf{x}^* sia un estremo relativo.

Appare quindi evidente come, i criteri di ottimo costituiscano le necessarie premesse teoriche per la soluzione dei problemi di programmazione non lineare.

Le più note condizioni necessarie di ottimo sono quelle formulate da Kuhn e Tucker [2]. Tuttavia, tali condizioni furono precedute di circa 3 anni da quelle più generali di Fritz John [7]. Infatti queste ultime non richiedono ipotesi restrittive sulla natura dei vincoli. Nel suo celebre articolo, Fritz John [7] risolve il Problema (2.1) escludendo vincoli di uguaglianza. Mangasarian e Fromovitz [4]

estendono le conclusioni di Fritz John al caso in cui siano presenti anche vincoli di uguaglianza, senza tentare di convertirli in vincoli di disuguaglianza.

Nel seguito, seguendo proprio l'approccio di Mangasarian e Fromovitz [4], verranno estese al caso generale le condizioni necessarie di Fritz John.

2.2 Le condizioni generalizzate necessarie di Fritz John

Prima di procedere alla dimostrazione delle condizioni necessarie di Fritz John è necessario acquisire alcuni elementi teorici utilizzati nelle dimostrazioni.

Teorema 2.2.1 (Teorema di Trasposizione di Motzkin). *Siano A , B e C matrici reali e cosatanti con A non identicamente nulla. O il sistema:*

$$\mathbf{y}^T \mathbf{A} < 0 \quad \mathbf{y}^T \mathbf{B} \leq 0 \quad \mathbf{y}^T \mathbf{C} = 0 \quad (2.2)$$

ha soluzione $\bar{\mathbf{y}}$, o il sistema

$$\mathbf{A}\mathbf{z}_1 + \mathbf{B}\mathbf{z}_2 + \mathbf{C}\mathbf{z}_3 = 0 \quad \mathbf{z}_1 \geq 0 \quad \mathbf{z}_1 \neq 0 \quad \mathbf{z}_2 \geq 0 \quad (2.3)$$

ha soluzione $\bar{\mathbf{z}}_1, \bar{\mathbf{z}}_2$ e $\bar{\mathbf{z}}_3$. Entrambe le possibilità non possono sussistere.

Lemma 2.2.2. *Siano $f_i(\mathbf{x})$ $i \in L = \{1, 2, \dots, \ell\} \neq \emptyset$ e h_j , $j = \{1, 2, \dots, k\}$, funzioni definite in un insieme aperto D di E^n ed aventi derivate parziali continue in D .*

Si consideri il sistema

$$f_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i \in L \quad (2.4a)$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j \in K \quad (2.4b)$$

con soluzione $\mathbf{x} \in D$ e sia

$$f_i(\mathbf{x}) < 0 \quad i \in L \quad (2.5a)$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j \in K \quad (2.5b)$$

un sistema che non ha soluzione in D . Allora il sistema

$$\bar{\mathbf{y}}^T \nabla f_i(\mathbf{x}^*) < 0 \quad i \in L \quad (2.6a)$$

$$\bar{\mathbf{y}}^T \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad j \in K \quad (2.6b)$$

non avrà soluzione in $\mathbf{y} \in E^n$, assunto che

$$\nabla h_j(\mathbf{x}^*), j \in K \quad (2.7)$$

siano linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Si assume (per assurdo) che i sistemi

$$f_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i \in L \quad (2.8a)$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j \in K \quad (2.8b)$$

e

$$\bar{\mathbf{y}}^\top \nabla f_i(\mathbf{x}^*) < 0 \quad i \in L \quad (2.9a)$$

$$\bar{\mathbf{y}}^\top \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad j \in K \quad (2.9b)$$

abbiano rispettivamente soluzione in $\mathbf{x}^* \in D$ e in $\bar{\mathbf{y}} \in E^n$, con $D \subset E^n$.

Si vuole verificare l'esistenza di una $\tilde{\mathbf{x}} \in E^n$ (così da contraddire le ipotesi del lemma) tale che sia soluzione del sistema

$$f_i(\tilde{\mathbf{x}}) < 0 \quad i \in L \quad (2.10a)$$

$$h_j(\tilde{\mathbf{x}}) = 0 \quad j \in K = \{1, 2, \dots, k\} \quad (2.10b)$$

Distinguiamo i seguenti casi:

1. $k = n$ (caso banale)

Essendo per ipotesi $\nabla h_j(\mathbf{x}^*)$, $j \in K$ linearmente indipendenti e $\bar{\mathbf{y}}^\top \nabla h_i(\mathbf{x}^*) = 0$, ciò implica che l'equazione abbia soluzione identicamente nulla, ovvero $\bar{\mathbf{y}} = 0$. Tuttavia, tale soluzione viola la condizione

$$\bar{\mathbf{y}}^\top \nabla f_i(\mathbf{x}^*) < 0 \quad i \in L \quad (2.11)$$

2. $k > n$

Caso escluso dall'indipendenza lineare dei $\nabla h_j(\mathbf{x}^*)$

3. $k < n$

Sia $\mathbf{f} : E^n \rightarrow E^\ell$ e $\mathbf{h} : E^n \rightarrow E^k$, $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})$ una matrice $n \times \ell$ delle derivate parziali prime di \mathbf{f} ed il generico elemento della matrice sarà espresso da

$$[\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})]_{ji} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \quad \text{con } i \in L, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.12)$$

In maniera del tutto analoga alla $\nabla f(\mathbf{x})$, si definisce la matrice $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})$, che avrà dimensioni $n \times k$.

Dalla teoria delle funzioni implicite si ha che, definita una partizione di $\mathbf{x} \in E^n$

$$\{ \mathbf{x}_I \quad \mathbf{x}_{II} \} \quad (2.13)$$

con $\mathbf{x}_I \in E^{n-k}$ e $\mathbf{x}_{II} \in E^k$, in un intorno U di \mathbf{x}_I^* , è possibile definire una funzione $\mathbf{e} : U \rightarrow E^k$ tale che:

$$\mathbf{x}_{II}^* = \mathbf{e}(\mathbf{x}_I^*) \quad (2.14)$$

per cui

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_I, \mathbf{e}(\mathbf{x}_I)) = 0, \quad \forall \mathbf{x}_I \in U \quad (2.15)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}_{II}} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) \quad \text{non singolare e dimensioni } k \times k \quad (2.16)$$

In maniera del tutto analoga a \mathbf{x} , per $\mathbf{y} \in E^n$ definiremo una partizione $\{ \mathbf{y}_I \quad \mathbf{y}_{II} \}$.

Dalla differenziabilità di $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ ed $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ e per la (2.15) si ha

$$\nabla_{\mathbf{x}_I} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) + \nabla_{\mathbf{x}_I} \mathbf{e}(\mathbf{x}_I^*) \nabla_{\mathbf{x}_{II}} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (2.17)$$

Premoltiplicando quest'ultima per $\bar{\mathbf{y}}_I^\top$ si ha

$$\bar{\mathbf{y}}_I^\top \nabla_{\mathbf{x}_I} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) + \bar{\mathbf{y}}_I^\top \nabla_{\mathbf{x}_I} \mathbf{e}(\mathbf{x}_I^*) \nabla_{\mathbf{x}_{II}} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (2.18)$$

Per le ipotesi

$$\bar{\mathbf{y}}_I^\top \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \text{per } j \in K \quad (2.19)$$

tale espressione può essere riscritta considerando la partizione di \mathbf{x} e \mathbf{y} , ovvero

$$\bar{\mathbf{y}}_I^\top \nabla_{\mathbf{x}_I} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) + \bar{\mathbf{y}}_{II}^\top \nabla_{\mathbf{x}_{II}} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (2.20)$$

Pertanto dalle equazioni (2.18) e (2.20) si ottiene

$$\bar{\mathbf{y}}_{II}^\top = \bar{\mathbf{y}}_I^\top \nabla_{\mathbf{x}_I} \mathbf{e}(\mathbf{x}_I^*) \quad (2.21)$$

Per la differenziabilità di $\mathbf{e}(\mathbf{x}_I)$ esiste uno scalare $\delta_1 > 0$ tale che $\forall \delta < \delta_1$ tale che

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}_I^* + \delta \bar{\mathbf{y}}_I) = \mathbf{e}(\mathbf{x}_I^*) + (\delta \nabla_{\mathbf{x}_I} \mathbf{e}(\mathbf{x}_I^*))^\top \bar{\mathbf{y}}_I + \delta \mathbf{c}(\mathbf{x}_I^*, \delta \bar{\mathbf{y}}_I) \|\bar{\mathbf{y}}_I\| \quad (2.22)$$

con \mathbf{c} funzione $\mathbf{c} : E^{n-k} \rightarrow E^k$ tale che $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{c}(\mathbf{x}_I^*, \delta \bar{\mathbf{y}}_I) = 0$

Per la differenziabilità di $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, (2.22) e (2.14), si ha per $\delta < \delta_1$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{f}(\mathbf{x}_I^* + \delta \bar{\mathbf{y}}_I, \mathbf{e}(\mathbf{x}_I^* + \delta \bar{\mathbf{y}}_I)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_I^* + \delta \bar{\mathbf{y}}_I, \mathbf{e}(\mathbf{x}_I^*) + \delta \bar{\mathbf{y}}_{II}) \\
& \quad + \delta \mathbf{c}(\mathbf{x}_I^* + \delta \bar{\mathbf{y}}_I, \|\bar{\mathbf{y}}_I\|) \\
& = \mathbf{f}(\mathbf{x}_I^*, \bar{\mathbf{x}}_{II}) + \delta \{ (\nabla_{\mathbf{x}_I} \mathbf{f}(\mathbf{x}_I^*, \mathbf{x}_{II}^*))^\top \bar{\mathbf{y}}_I \\
& \quad + (\nabla_{\mathbf{x}_{II}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_I^*, \mathbf{x}_{II}^*))^\top (\bar{\mathbf{y}}_{II} + \mathbf{c}(\mathbf{x}_I^*, \delta \bar{\mathbf{y}}_I, \|\bar{\mathbf{y}}_I\|) \\
& \quad + \mathbf{b}(\mathbf{x}_I^*, \mathbf{x}_{II}^*; \delta \bar{\mathbf{y}}_I, \delta \bar{\mathbf{y}}_{II} + \delta \mathbf{c}(\mathbf{x}_I^*, \delta \bar{\mathbf{y}}_I, \|\bar{\mathbf{y}}_I\|) \\
& \quad \|\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{y}}_{II} + \mathbf{c}(\mathbf{x}_I^*, \delta \bar{\mathbf{y}}_I, \|\bar{\mathbf{y}}_I\|) \} , \tag{2.23}
\end{aligned}$$

con $\mathbf{b} : E^n \rightarrow E^\ell$ tale che $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{b} = 0$.

Per le ipotesi si ha

$$\bar{\mathbf{y}}_I^\top \nabla f_i(\mathbf{x}_I^*) < 0, \quad \text{con } i \in L \tag{2.24}$$

ovvero:

$$(\nabla_{\mathbf{x}_I} f(\mathbf{x}_I^*, \mathbf{x}_{II}^*))^\top \bar{\mathbf{y}}_I + (\nabla_{\mathbf{x}_{II}} f(\mathbf{x}_I^*, \mathbf{x}_{II}^*))^\top \bar{\mathbf{y}}_{II} < 0 \tag{2.25}$$

Da quest'ultima segue che esiste un $\delta_2 > 0$ tale che per $\forall \delta \in (0; \delta_2)$ sussiste la disuguaglianza

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_I^* + \delta \bar{\mathbf{y}}_I, \mathbf{e}(\mathbf{x}_I^*, \mathbf{x}_{II}^* + \delta \bar{\mathbf{y}}_I)) < 0 \tag{2.26}$$

e, in virtù della (2.15), $\forall \delta \in (0; \delta_2)$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_I^* + \delta \bar{\mathbf{y}}_I, \mathbf{e}(\mathbf{x}_I^* + \delta \bar{\mathbf{y}}_I)) = 0 \tag{2.27}$$

che mettono in evidenza la contraddizione.

□

Lemma 2.2.3. *Siano valide le ipotesi del Lemma 2.2.2. In tal caso esisteranno dei vettori $\bar{\mathbf{r}} \in E^\ell$, $\bar{\mathbf{s}} \in E^k$, tali che*

$$\sum_{i=1}^{\ell} \bar{r}_i \nabla f_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^k \bar{s}_j \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = 0 \tag{2.28a}$$

$$\bar{\mathbf{r}} \geq 0 \tag{2.28b}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{r}} \\ \bar{\mathbf{s}} \end{bmatrix} \neq 0 .^1 \tag{2.28c}$$

Dimostrazione.

1. Caso $\nabla h_j(\mathbf{x}^*)$ con $j \in K$ linearmente dipendenti.

La tesi segue imponendo $\mathbf{r} = 0$. In tal caso, le (2.28) sussistono per la dipendenza lineare di $\nabla h_j(\mathbf{x}^*)$, $j \in K$.

2. Caso $\nabla h_j(\mathbf{x}^*)$, con $j \in K$, linearmente indipendenti.

La dimostrazione segue dal Lemma 2.2.2 e dal teorema di trasposizione di Motzkin.

Sia:

$$\begin{aligned} A_i &= \nabla f_i(\mathbf{x}^*) & i \in L \\ C_j &= \nabla h_j(\mathbf{x}^*) & j \in K \end{aligned}$$

con A_i e C_j colonne delle matrici \mathbf{A} e \mathbf{C} , rispettivamente. Dalla tesi del Lemma 2.2.2 segue che il sistema

$$\begin{cases} \mathbf{y}^\top \mathbf{A} < 0 \\ \mathbf{y}^\top \mathbf{B} \leq 0 \\ \mathbf{y}^\top \mathbf{C} = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

non ha soluzione in D . Dal teorema di Motzkin segue che il sistema

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{z}_1 + \mathbf{C}\mathbf{z}_3 = 0 \\ \mathbf{z}_1 \neq 0 \\ \mathbf{z}_1 \geq 0 \\ \mathbf{z}_3 \geq 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

deve avere soluzione. Imponendo $\mathbf{r} = \mathbf{z}_1$ e $\mathbf{s} = \mathbf{z}_3$, resta dimostrato l'enunciato.

□

¹Con la presente notazione si intende che non tutte le componenti del vettore possono annullarsi.

Teorema 2.2.4 (Condizioni generalizzate necessarie di Fritz John). Se \mathbf{x}^* è soluzione del problema (2.1), allora esistono dei vettori

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{u}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_m \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{u}} \in E^{m+1} \quad \bar{\mathbf{v}} = \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_k \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{v}} \in E^k \quad (2.31)$$

tali che

$$\left. \begin{array}{l} \bar{u}_0 \nabla \theta(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^k \bar{v}_j \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = 0 \\ \sum_{i=1}^m \bar{u}_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \\ \bar{\mathbf{u}} \geq 0 \\ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \neq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Condizioni Generalizzate} \\ \text{Necessarie di} \\ \text{Fritz John} \end{array} \quad (2.32)$$

Dimostrazione. Sia

$$\bar{M} = \{i \mid i \in M, g_i(\mathbf{x}^*) = 0\} \quad (2.33)$$

e

$$D = \{\mathbf{x}^* \mid \mathbf{x}^* \in E^n, g_i(\mathbf{x}^*) < 0, i \in M - \bar{M}\} \quad (2.34)$$

Poniamo inoltre:

$$f_1(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{x}^*) \quad (2.35a)$$

$$f_i(\mathbf{x}) = g_{P_i}(\mathbf{x}), \quad P_i \in \bar{M} \quad (i = 2, 3, \dots, \ell) \quad (2.35b)$$

Considerata la definizione di $f_1(\mathbf{x})$, l'insieme $L = \{1, 2, \dots, \ell\}$ non è vuoto (indipendentemente dal fatto che \bar{M} sia vuoto o meno).

Il sistema

$$f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i \in L \quad (2.36a)$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j \in K \quad (2.36b)$$

ha soluzione $\mathbf{x}^* \in D$. Per contro, il sistema

$$f_i(\mathbf{x}) < 0, \quad i \in L \quad (2.37a)$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j \in K \quad (2.37b)$$

NON ha soluzione in D . Infatti, se il sistema delle (2.37) avesse soluzione $\hat{\mathbf{x}} \in D$ ne conseguirebbe che:

$$\theta(\hat{\mathbf{x}}) - \theta(\mathbf{x}^*) < 0 \quad (2.38a)$$

$$g_i(\hat{\mathbf{x}}) < 0 \quad i \in M \quad (2.38b)$$

$$h_j(\hat{\mathbf{x}}) = 0 \quad j \in K \quad (2.38c)$$

Queste ultime costituiscono una contraddizione. Infatti la (2.38a) nega che $\theta(\mathbf{x}^*)$ sia un minimo per il seguente insieme

$$S = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in E^n, g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in M, h_j(\mathbf{x}) = 0, j \in K\} \quad (2.39)$$

Abbiamo quindi appena constatato che le ipotesi del Lemma 2.2.2, coincidenti con quelle del Lemma 2.2.3, sono verificate.

Per il Lemma 2.2.3 segue l'esistenza dei vettori

$$\bar{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \bar{r}_0 \\ \bar{r}_{P_2} \\ \bar{r}_{P_3} \\ \vdots \\ \bar{r}_{P_\ell} \end{bmatrix} \quad (\bar{\mathbf{r}} \in E^\ell) \quad (2.40)$$

e

$$\bar{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \bar{s}_1 \\ \bar{s}_2 \\ \vdots \\ \bar{s}_k \end{bmatrix} \quad (\bar{\mathbf{s}} \in E^k) \quad (2.41)$$

tali che

$$\bar{r}_0 \nabla \theta(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=2}^{\ell} \bar{r}_{P_i} \nabla g_{P_i}(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^k \bar{s}_j \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (2.42)$$

con $\bar{\mathbf{r}} \geq 0$ e $\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \neq 0$.

Si tenga presente che $P_i \in \overline{M}$ e in generale $\nabla g_{P_i}(\mathbf{x}^*) \neq 0$.
 Se definiamo $\bar{\mathbf{u}} \in E^{m+1}$ e $\bar{\mathbf{v}} \in E^k$ nella maniera seguente

$$\bar{u}_0 = \bar{r}_0 \quad (2.43)$$

$$\bar{u}_i = \begin{cases} 0 & \text{per } i \in M - \overline{M} \\ \bar{r}_i & \text{per } i \in \overline{M} \end{cases} \quad (2.44)$$

(l'esistenza degli \bar{r}_i è garantita dal Lemma 2.2.3)

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{s}} \quad (2.45)$$

si avrà che:

1. $\sum_{i=1}^m \bar{u}_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0$ per la definizione di $\bar{\mathbf{u}}$, in quanto per $i \in M - \overline{M}$, $u_i = 0$;
2. è possibile riscrivere la relazione (2.42) come segue

$$\bar{u}_0 \nabla \theta(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^k \bar{v}_j \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (2.46)$$

con

$$\bar{\mathbf{u}} \geq 0 \quad (2.47)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (2.48)$$

Le condizioni generalizzate necessarie di Fritz John sono così dimostrate. \square

2.3 Qualificazione dei vincoli di uguaglianza e disuguaglianza

Teorema 2.3.1. *Sia \mathbf{x}^* la soluzione del problema NLP. Una condizione sufficiente affinché siano soddisfatte le condizioni necessarie di Karush-Kuhn-Tucker (KKT)*

$$\nabla\theta(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^k \bar{v}_j \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (2.49a)$$

$$\sum_{i=1}^m \bar{u}_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (2.49b)$$

$$u_i \geq M \quad i \in M \quad (2.49c)$$

è che esista un vettore $\mathbf{y} \in E^n$ tale che:

1.
$$\mathbf{y}^T \nabla g_i(\mathbf{x}^*) < 0 \quad i \in \bar{M} = \{i \mid i \in M, g_i(\mathbf{x}^*) = 0\} \neq \emptyset \quad (2.50a)$$

2.
$$\mathbf{y}^T \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad j \in K \quad (2.50b)$$

3. siano linearmente indipendenti le

$$\nabla h_j(\mathbf{x}^*) \quad \text{per } j \in K \quad (2.50c)$$

Dimostrazione. Dimostriamo che se sono vere le (2.50) lo saranno anche le (2.49). Infatti, se $\bar{M} = \emptyset$ le condizioni di Fritz John (FJ) non sono verificate se $\bar{u}_0 = 0$ e la (2.50c) è valida. Quindi, per $\bar{u}_0 > 0$ le condizioni KKT discendono da quelle di FJ.

Sempre per $\bar{M} = \emptyset$, le condizioni di FJ non sono verificate per $\bar{u}_0 = 0$ e qualora le relazioni $\nabla h_j(\mathbf{x}^*) \quad j \in K$ siano indipendenti. Poiché nella dimostrazione delle condizioni generalizzate necessarie di FJ abbiamo definito il vettore $\bar{\mathbf{u}} \in E^{m+1}$ come

$$\bar{u}_0 = r_0 \quad (2.51)$$

$$\bar{u}_i = \begin{cases} 0 & \text{per } i \in M - \bar{M} \\ \bar{r}_i & \text{per } i \in \bar{M} \end{cases} \quad (2.52)$$

discende

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

□

e la condizione (2.49a) di FJ si riduce a

$$\sum_{j=1}^k \bar{v}_j \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (2.54)$$

Essendo $\nabla h_j(\mathbf{x}^*)$ linearmente indipendenti dovrà risultare $\bar{\mathbf{v}} = 0$ e ciò viola la terza condizione di FJ $\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \neq 0$.

Imponendo $\bar{u}_0 > 0$ le condizioni di KKT discendono da quelle di FJ. Infatti, se nella prima condizione di FJ si pone $\bar{u}_0 = \bar{u}_0^* > 0$ e si dividono tutti i termini per quest'ultimo, le condizioni di FJ si riconducono alle (2.49).

Consideriamo ora il caso $\bar{M} \neq \emptyset$ e definiamo le matrici \mathbf{A} e \mathbf{C} , le cui i^{me} colonne \mathbf{a}_i e \mathbf{c}_i sono, rispettivamente, definite da

$$\mathbf{a}_i = \nabla g_i(\mathbf{x}^*) \quad , \quad i \in \bar{M} \quad (2.55)$$

$$\mathbf{c}_i = \nabla h_j(\mathbf{x}^*) \quad , \quad j \in K \quad (2.56)$$

Per il teorema di trasposizione di Motzkin (con matrice \mathbf{B} identicamente nulla), dalla condizione (2.50a) segue che il sistema²

$$\mathbf{A}\mathbf{z}_1 + \mathbf{C}\mathbf{z}_3 = 0 \quad , \quad \mathbf{z}_1 \geq 0, \quad \mathbf{z}_1 \neq 0 \quad (2.57)$$

non ha soluzione.

Considerando le definizioni delle matrici \mathbf{A} e \mathbf{C} , la (2.57) può anche essere riscritta come

$$\sum_{i \in \bar{M}} z_{1_i} \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^k z_{2_j} \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (2.58)$$

con $\mathbf{z}_1 \geq 0, \mathbf{z}_1 \neq 0$.

Nelle ipotesi del teorema \mathbf{x}^* è soluzione del problema NLP. Se $\bar{u}_0 = 0$, le condizioni di FJ continuano a valere. Poniamo infatti

$$z_{1_i} = \bar{u}_i \quad i \in \bar{M} \quad (2.59)$$

$$\bar{\mathbf{z}}_2 = \bar{\mathbf{v}} \quad (2.60)$$

Siamo giunti ad una contraddizione. Infatti per FJ esistono due vettori $\bar{\mathbf{u}}$ e $\bar{\mathbf{v}}$ che soddisfano la (2.58). Appare quindi evidente che dovrà essere $\bar{u}_0 \neq 0$ e al fine di garantire il rispetto della terza condizione di FJ, $\bar{\mathbf{u}} \geq 0$, è necessario sia $\bar{u}_0 > 0$.

Ponendo $\bar{u}_0 = \bar{u}_0^*$ seguono le condizioni di KKT. \square

²Nel vettore \mathbf{z}_1 ci possono essere componenti nulle, ma non tutte contemporaneamente.

Bibliografia

- [1] J. L. Lagrange. *Mécanique Analytique*, volume I. La Veuve de Saint, Libraire, 1833.
- [2] H. W. Kuhn and A. W. Tucker. Nonlinear programming. In J. Neyman, editor, *Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 481–491, 1951.
- [3] W. Karush. Minima of functions of several variables with inequalities as side conditions. Master’s thesis, University of Chicago, 1939.
- [4] O. L. Mangasarian and S. Fromovitz. The Fritz John Necessary Optimality Conditions in the Presence of Equality and Inequality Constraints. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 17:37–47, 1967.
- [5] P. Loreti. Metodi matematici per l’ingegneria. Technical report, Università Roma Sapienza, 2017.
- [6] H. Hancock. *Theory of Maxima and Minima*. Dover Publications Inc., 1960.
- [7] F. John. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. In *Studies and Essays, Courant Anniversary Volume*, pages 543–560. Interscience, 1948.

Appendici

Appendice A

Codici di calcolo

A.1 Programma Matlab

```
1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2 %                                                                    %
3 % Soluzione problema di ottimizzazione                               %
4 % della funzione f(x,y)                                             %
5 %                                                                    %
6 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
7 %
8 % Affronteremo numericamente le seguenti tipologie di
9 % problemi:
10 %
11 % a) Calcolare i valori di (x,y) che rendono estrema
12 % la funzione f(x,y) e si trovano all'interno
    della
13 % regione delimitata dalla g(x,y)=0
14 %
15 % b) Calcolare i valori di (x,y) che rendono estrema
16 % la funzione f(x,y) e si trovano sulla curva g(x,
    y)=0
17 % Per la soluzione ci avvarremo del metodo dei
18 % moltiplicatori di Lagrange
19 %
20 close all;
```

```

21 clear all;
22 clc;
23 syms x y z real
24 % f: Funzione di cui si vogliono calcolare i valori
25 %   estremi. Esempio tratto dalla dispensa Prof. P.
      Loretì
26 f=4*x*y
27 % g: Funzione di vincolo
28 a=2; b=1; % Lunghezza semiassi ellisse
29 g=x^2/a^2 + y^2/b^2 -1
30 % Calcoliamo funzione gradiente di f
31 gradf=jacobian(f,[x,y,z])
32 % Calcoliamo i valori di x ed y che
33 % rendono nulle le derivate parziali della funzione f
34 %
35 % Soluzione caso b)
36 %
37 % Ciascuna soluzione (xfcrit,yfcrit) individua un
      punto critico
38 [xfcrit , yfcrit]=solve(gradf(1),gradf(2));
39 [xfcrit , yfcrit]
40 % Valutiamo la funzione di vincolo g(x,y) in ciascun
      punto critico
41 %
42 % Individua quanti sono i punti critici all'interno
      della
43 % regione interna a g(x,y)=0
44 gfun=inline(vectorize(g))
45 %
46 % Soluzione caso a)
47 %
48 % Individua quanti sono i punti critici all'interno
      della
49 % regione interna a g(x,y)=0
50 ss=double(gfun(xfcrit , yfcrit))
51 sols_indici=find(ss<0)
52 %
53 ffun=inline(vectorize(f))

```

```

54 ffun(xfcrit(sols_indici), yfcrit(sols_indici))
55 %
56 % Calcola la funzione gradiente di g
57 gradg=jacobian(g,[x,y,z])
58 % Imponi sia nullo prodotto vettoriale dei gradienti
59 % di f(x,y) e g(x,y)
60 %
61 gradcross=cross(gradf, gradg);
62 lagr=gradcross(3)
63 %
64 % Risolvi il sistema di equazioni nonlineari
65 [xboundcrit, yboundcrit]=solve(g, lagr)
66 %
67 % Talvolta il solutore non restituisce tutte le
68 % possibili soluzioni
69 [xx, yy] = meshgrid(-2:.05:2, -2:.05:2);
70 gfun = inline(vectorize(g));
71 lagfun = inline(vectorize(lagr));
72 contour(xx, yy, gfun(xx, yy), [0,0], 'r'); hold on;
73 contour(xx, yy, lagfun(xx, yy), [0,0], 'b'); hold off;

```